PRIMER NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Ignacio tiene una hoja de papel. La puede cortar en 6 pedazos o en 8 pedazos, a su elección. Luego, en cada etapa, puede elegir uno de los pedazos existentes y cortarlo en 6 pedazos o cortarlo en 8 pedazos.
a) Decidir si de esta manera Ignacio puede tener, después de alguna etapa, exactamente 24 pedazos de papel.
b) Decidir, si de esta manera Ignacio puede tener, después de alguna etapa, exactamente 32 pedazos de papel.
Si la respuesta es no, explicar por qué y si es sí, indicar cómo debe realizar los cortes.

Problema 2.
En el triángulo isósceles ABC sean D y E puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que las rectas BE y CD se cortan en F. Además, los triángulos AEB y ADC son iguales y tienen $AD=AE=10$ y $AB=AC=30$.
Calcular $\dfrac{\text{área}(ADFE)}{\text{área}(ABC)}$.

Problema 3.
En el pizarrón están escritos los 18 números enteros desde 1 hasta 18. Determinar la menor cantidad de números que hay que borrar para que entre los números restantes no haya dos tales que su suma sea un cuadrado perfecto.

SEGUNDO NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Fede debe elegir 50 números enteros distintos, desde 1 hasta 100 inclusive de modo que su suma sea igual a 2900. Determinar cuál es la menor cantidad de números pares que puede haber entre los 50 números que elija Fede.

Problema 2.
Sea n un entero positivo. Se tienen n colores, $n \geq 1$. Cada uno de los números enteros entre 1 y 1000 se quiere pintar con uno de los n colores de modo que cada dos números diferentes, si uno divide al otro tengan colores diferentes. Dar el menor número n para que esto sea posible.

Problema 3.
Sea *ABCD* un paralelogramo con $A\hat{B}C = 105^\circ$. En el interior del paralelogramo existe un punto *E* tal que el triángulo *BEC* es equilátero y $C\hat{E}D = 135^\circ$. Sea *K* el punto medio del lado *AB*. Calcular la medida del ángulo $B\widehat{K}C$.

TERCER NIVEL

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Para todo número entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Hallar, si existe, un número entero positivo n de 171 dígitos tal que 7 divide a $S(n)$ y 7 divide a $S(n+1)$.

Problema 2.
Sea $k > 1$ un entero. Determinar el menor entero positivo n tal que algunas casillas de un tablero de $n \times n$ se pueden pintar de negro de modo que en cada fila y en cada columna haya exactamente k casillas negras, y además, las casillas negras no compartan ni un lado ni un vértice con otra casilla negra.
ACLARACIÓN: Hay que responder n en función de k.

Problema 3.
Sea ABC un triángulo isósceles rectángulo con ángulo recto en A. Sean E y F puntos en AB y AC respectivamente tales que $E\widehat{C}B = 30^{o}$ y $F\widehat{B}C = 15^{o}$. Las rectas CE y BF se cortan en P y la recta AP corta al lado BC en D. Calcular la medida del ángulo $F\widehat{D}C$.