PRIMER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Determinar todos los pares de números primos p y q mayores que 1 y menores que 100, tales que los siguientes cinco números:

$$p+6,\ p+10,\ q+4,\ q+10,\ p+q+1$$

son todos números primos.

Problema 2.
En cada billete de la lotería de OMA hay un número de 9 cifras que solo usa los dígitos 1, 2 y 3 (no necesariamente los tres). Cada billete tiene uno de los tres colores rojo, azul o verde. Se sabe que si dos billetes no coinciden en ninguna de las 9 cifras entonces son de colores distintos. El billete 122222222 es rojo, el 222222222 es verde, ¿de qué color es el billete 123123123?

Problema 3.
Sea ABC un triángulo isósceles y rectángulo en A con $AB=AC$. Sean M y N en el lado BC, con M entre B y N, tal que $BM^2+NC^2=MN^2$. Determinar la medida del ángulo $M\hat{A}N$.

SEGUNDO NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Se tienen dos pizarrones *A* y *B*. Hay que escribir en ellos algunos de los números enteros mayores o iguales a 2 y menores o iguales a 20 de modo tal que cada número del pizarrón *A* sea coprimo con cada número del pizarrón *B*. Determinar el máximo valor posible de la multiplicación de la cantidad de números escritos en *A* por la cantidad de números escritos en *B*.
Nota: Dos números enteros son coprimos si su máximo común divisor es 1.

Problema 2.
En una semicircunferencia de centro *O*, sea *C* un punto en el diámetro *AB* diferente de *A*, de *B* y de *O*. Se trazan por *C* dos semirrectas tales que los ángulos que forman estas semirrectas con el diámetro *AB* sean iguales y que intersecan a la semicircunferencia en *D* y en *E*. La recta perpendicular a *CD* por *D* corta a la semicircunferencia en *K*. Demostrar que si $D \neq E$ entonces *KE* es paralelo a *AB*.

Problema 3.
Una circunferencia está dividida en $2n$ arcos iguales mediante $2n$ puntos. Hallar todos los $n > 1$ tales que esos puntos se pueden unir de a dos utilizando *n* segmentos, todos ellos de longitudes diferentes y de modo que cada punto sea extremo de exactamente un segmento.

TERCER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Una sucesión infinita de dígitos 1 y 2 está determinada por las siguientes dos propiedades:
(i) La sucesión se construye escribiendo, en algún orden, bloques 12 y bloques 112.
(ii) Si se reemplaza cada bloque 12 por 1 y cada bloque 112 por 2 se obtiene, de nuevo, la misma sucesión.
¿En qué posición está el centésimo dígito 1? ¿Cuál es el milésimo dígito de la sucesión?

Problema 2.
Sea m un entero positivo para el que existe un entero positivo n tal que la multiplicación mn es un cuadrado perfecto y $m - n$ es primo. Hallar todos los m para $1000 \leq m \leq 2021$.

Problema 3.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tal que $A\hat{B}C = 60°$.
a) Demostrar que si $BC=CD$ entonces $AB= CD+DA$.
b) ¿Es cierto que si $AB= CD+DA$ entonces $BC=CD$?