PRIMER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Martu quiere armar un juego de tarjetas con las siguientes propiedades:

- Cada tarjeta tiene escrito un número entero positivo.
- El número de cada tarjeta es igual a uno de 5 números posibles.
- Si se toman dos tarjetas cualesquiera y se suman, siempre es posible encontrar otras dos tarjetas del juego tales que la suma sea la misma.

Determinar la menor cantidad de tarjetas que puede tener el juego de Martu y dar un ejemplo para esa cantidad.

Problema 5.
Mica escribió una lista de números con el siguiente procedimiento. El primer número es 1, y luego, en cada paso, escribió el resultado de sumar el número anterior más 3. Los primeros números de la lista de Mica son 1, 4, 7, 10, 13, 16, …
A continuación, Facu subrayó todos los números de la lista de Mica que son mayores que 10 y menores que 100000, y que tienen todas sus cifras iguales.
¿Cuáles son los números que subrayó Facu?

Problema 6.
Mili elije un número entero positivo n y a continuación Uriel colorea cada número entero entre 1 y n inclusive de rojo o de azul. Luego Mili elige cuatro números a, b, c, d de un mismo color (puede haber números repetidos). Si $a+b+c=d$ entonces gana Mili. Determinar el menor n que puede elegir Mili para asegurarse la victoria, no importa cómo coloree Uriel.

SEGUNDO NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
La suma de varios enteros positivos, no necesariamente diferentes, todos ellos menores o iguales a 10 es igual a *S*. Se quiere distribuir todos estos números en dos grupos tales que la suma de los números en cada grupo sea menor o igual a 80. Determinar todos los valores de *S* para los que esto es posible.

Problema 5.
Determinar todos los enteros positivos *n* tales que $n \cdot 2^{n-1} + 1$ es un cuadrado perfecto.

Problema 6.
Decidir si es posible elegir 330 puntos en el plano de modo que entre todas las distancias que se forman entre dos ellos haya por lo menos 1700 que sean iguales.

TERCER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Hallar los números reales *x*, *y*, *z* tales que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}.$$

Problema 5.
Se define la sucesión a_n ($n\geq 1$) de números naturales como $a_{n+1}=a_n+b_n$, donde b_n es el número que tiene los mismos dígitos que a_n pero en el orden opuesto (b_n puede comenzar con 0). Por ejemplo, si $a_1=180$, entonces $a_2=261, a_3=423, ...$

(a) Decidir si se puede elegir a_1 de manera que a_7 sea primo.

(b) Decidir si se puede elegir a_1 de manera que a_5 sea primo.

Problema 6.
Decimos que un entero positivo *k* es *tricúbico* si existen tres enteros positivos *a*, *b*, *c*, no necesariamente distintos, tales que $k=a^3+b^3+c^3$.

a) Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* que satisfacen la siguiente condición: exactamente uno de los tres números *n*, *n*+2 y *n*+28 es tricúbico.

b) Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* que satisfacen la siguiente condición: exactamente dos de los tres números *n*, *n*+2 y *n*+28 son tricúbicos.

c) Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* que satisfacen la siguiente condición: los tres números *n*, *n*+2 y *n*+28 son tricúbicos.