

PROBLEMAS INTERCOLEGIAL OMA 2016

Primer Nivel

1. Reemplazar a, b, c, d por cuatro números enteros distintos mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 6 para que sea verdadera la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + 2$
2. Calcular cuántos son los números enteros positivos de cuatro dígitos que satisfacen simultáneamente
 - Son múltiplos de 5.
 - Usan solamente los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5.
 - Los dígitos pueden repetirse y ningún número empieza con 0
3. Se tienen cuatro vértices consecutivos de un polígono regular de 10 lados, A, B, C y D. Sea P el punto interior al polígono tal que el triángulo BPC es equilátero. Calcular la medida del ángulo \widehat{BPD} .

Segundo Nivel

1. Hallar los números x e y que satisfacen al mismo tiempo:
 - x es un número capicúa de 4 dígitos.
 - $y = x + 312$ es un número capicúa de 5 dígitos.ACLARACION: Un número es capicúa si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha.
2. Se tiene una lista de números enteros positivos distintos. Uno de los números es 137 y el promedio de todos los números de la lista es 97. Si se tacha el número 137, el promedio de los restantes números de la lista es igual a 89. Determinar el mayor número entero que puede estar en la lista.
3. Sea ABCD un cuadrilátero de lados AB, BC, CD y DA. Se sabe que $\widehat{ABD} = 10^\circ$, $\widehat{DBC} = 50^\circ$, $\widehat{BCA} = 60^\circ$ y $\widehat{ACD} = 20^\circ$. Calcular las medidas de los ángulos \widehat{CAD} y \widehat{BDA} .

Tercer Nivel

1. Hallar un cuadrado perfecto tal que al sumarle 100 sea igual a un cuadrado perfecto más 1 y al sumarle nuevamente 100 sea un cuadrado perfecto.
ACLARACION: Un número se llama cuadrado perfecto si es igual a un número entero elevado al cuadrado.
2. En una progresión aritmética de 15 términos a_1, a_2, \dots, a_{15} se sabe que la suma de los 15 términos es igual al doble de la suma de los primeros 10 términos. Si d es la diferencia de la progresión, calcular $\frac{d}{a_1}$.
ACLARACION: En una progresión aritmética de diferencia d cada término es igual al anterior más d.
3. Sea ABCD un trapecio isósceles tal que AB es paralelo a CD (los lados no paralelos son BC y DA). Se sabe que $AB = 16$ y $AD = BC = 8$. Además M es el punto medio de AB y $DM = CM = 5$. Calcular la medida del lado CD.