PROBLEMAS NACIONAL OMA 2016

Primer Nivel – Primer día

Problema 1.
En basquetbol, llamamos *coeficiente de eficacia* de un jugador al resultado de dividir la cantidad de tiros libres embocados por la cantidad de tiros libres ejecutados. Al finalizar el primer tiempo el coeficiente de eficacia de Mateo era menor que $\frac{3}{4}$, y al finalizar el partido era mayor que $\frac{3}{4}$. ¿Se puede afirmar con certeza que hubo un momento en el que su coeficiente de eficacia fue exactamente $\frac{3}{4}$? Responder la misma pregunta para $\frac{3}{5}$ en lugar de $\frac{3}{4}$.

Problema 2.
Se tienen 100 cajas infinitamente grandes con exactamente una ficha en cada caja. Bruno puede agregar en cada caja cuantas fichas quiera. A continuación se desarrolla la siguiente secuencia de pasos: En el paso 1 se agrega una ficha a cada caja. En el paso 2 se agrega una ficha en cada caja que contenga una cantidad par de fichas. En el paso 3 se agrega una ficha en cada caja en la que la cantidad de fichas sea divisible por 3. En el paso 4 se agrega una ficha en cada caja en la que la cantidad de fichas sea divisible por 4, y así siguiendo.
El objetivo de Bruno es que siempre se pueda encontrar entre las 100 cajas dos que contengan diferente cantidad de fichas.
Determinar si Bruno puede agregar convenientemente las fichas antes de la secuencia de pasos para lograr su objetivo.

Problema 3.
Sea *ABC* un triángulo rectángulo con $C = 90^{o}$. Los puntos *D* y *E* en la hipotenusa *AB* son tales que $AD = AC$ y $BE = BC$. Los puntos *P* y *Q* en *AC* y *BC* respectivamente son tales que $AP = AE$ y $BQ = BD$. Sea *M* el punto medio del segmento *PQ*. Demostrar que *M* es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo *ABC* y calcular la medida del ángulo AMB.

Segundo día

Problema 4.
En cada casilla de un tablero de 17×17 hay que escribir un número natural de 1 a *n* inclusive de modo que se usen todos estos números (se pueden repetir). Si una fila contiene dos casillas *A* y *B* con el mismo número *k* y *A* está a la izquierda de *B* entonces no hay números *k* en las casillas de la columna de *A* que estén por encima de *A*.
El número *n* es el menor posible.
Determinar el valor de *n* y mostrar un tablero con esas condiciones.

Problema 5.
Se consideran los 100 números $199, 199^2, 199^3, 199^4, ..., 199^{100}$. A cada uno de ellos se le calcula la suma de sus dígitos. Determinar el valor mínimo que se obtiene al hacer estas 100 cuentas.

Problema 6.
Alex y Bibi juegan al siguiente juego. Alex elige un número natural *k* menor o igual que 1000. Luego Bibi elige una colección *B* que contiene más de *k* números enteros entre 0 y 1000 inclusive y en la que puede haber repeticiones. Ahora Alex puede aplicar reiteradas veces la siguiente operación en *B*: elige *k* números de *B* y los cambia del siguiente modo. A cada número elegido *b* lo reemplaza por $b+1$ si *b* es menor que 1000 y lo reemplaza por 0 si $b = 1000$.
Alex gana si mediante varias operaciones logra que todos los números de *B* sean iguales a 0; si él fracasa entonces gana Bibi. Hallar todos los *k* que garantizan a Alex una victoria, no importa la colección *B* que elija Bibi.

Segundo Nivel - Primer día

Problema 1.
En las casillas de un tablero de 1×100 Julián escribe todos los números enteros desde 1 hasta 100 inclusive en algún orden, a su elección, y sin repetir números. Para cada tres casillas consecutivas del tablero, se marca la casilla que contiene al número con el valor del medio de los números de esas tres casillas. Por ejemplo, si los tres números son 7, 99 y 22 entonces se marca la casilla del 22. Sea *S* la suma de todos los números de las casillas marcadas. Determinar el mínimo valor que puede tomar *S*.
ACLARACIÓN. Cada número marcado interviene en la suma *S* exactamente una vez, sin embargo puede estar marcado más de una vez.

Problema 2.
Se elige el punto *D* del lado *BC* del triángulo acutángulo *ABC* de modo que $AD = AC$. Sean *P* y *Q* respectivamente los pies de las perpendiculares desde *C* y *D* al lado *AB*. Se sabe que $AP^2 + 3BP^2 = AQ^2 + 3BQ^2$. Calcular la medida del ángulo ABC.

Problema 3.
Nico quiere escribir alrededor de una circunferencia los 100 números enteros del 1 al 100 en algún orden y sin repeticiones, para que tengan la siguiente propiedad: al recorrer la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, la suma de las 100 distancias entre cada número y su siguiente sea igual a 198. Determinar de cuántas maneras se pueden ordenar los 100 números para que Nico logre su objetivo.
ACLARACIÓN: La distancia entre dos números *a* y *b* es igual al valor absoluto de su resta: $|a-b|$.

Segundo día

Problema 4.
Se tiene un tablero con *n* filas y 12 columnas. Cada casilla del tablero contiene un 1 o un 0. El tablero tiene las siguientes propiedades:
(a) Cada dos filas son distintas.
(b) Cada fila contiene exactamente 4 casillas con 1.
(c) Para cada 3 filas hay una columna que las interseca en tres casillas con 0.
Hallar el mayor *n* para el que existe un tablero con estas tres propiedades.

Problema 5.
Para cada par *a*, *b* de números naturales coprimos sea $d_{a,b}$ el máximo común divisor de $51 \cdot a + b$ y $a + 51 \cdot b$. Hallar el máximo valor posible de $d_{a,b}$.
ACLARACIÓN: *a* y *b* son coprimos si su máximo común divisor es igual a 1.

Problema 6.
Se marcan en una circunferencia 999 puntos negros que la dividen en 999 arcos de longitud 1. Hay que colocar sobre la circunferencia *d* arcos de longitudes $1, 2, ..., d$ de modo que cada arco comience y termine en dos puntos negros y ninguno de los *d* arcos esté contenido en otro de los *d* arcos. Hallar todos los valores de *d* para los cuales esta construcción es posible.
ACLARACIÓN: Dos arcos pueden tener uno o más puntos comunes.

Tercer Nivel – Primer día

Problema 1.
Dar una progresión aritmética de 2016 números naturales tales que ninguno sea potencia perfecta pero su multiplicación sea una potencia perfecta.
ACLARACIÓN: Una potencia perfecta es un número de la forma n^k donde *n* y *k* son ambos números naturales mayores o iguales que 2.

Problema 2.
Para un entero $m \geq 3$ sea $S(m) = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m}$ (la fracción $\frac{1}{2}$ no participa en la suma y sí participan las fracciones $\frac{1}{k}$ para los enteros desde 3 hasta *m*). Sean $n \geq 3$ y $k \geq 3$. Comparar los números $S(nk)$ y $S(n) + S(k)$.

Problema 3.
Agustín y Lucas, por turnos, marcan cada vez una casilla que aun no ha sido marcada en un tablero cuadriculado de 101×101. Agustín comienza el juego. No se puede marcar una casilla que ya tenga dos casillas marcadas en su fila o su columna. El que no puede hacer su movida pierde. Decidir cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora.

Segundo día

Problema 4.
Hallar los ángulos de un cuadrilátero convexo *ABCD* tal que $ABD = 29^{\circ}$, $ADB = 41^{\circ}$, $ACB = 82^{\circ}$ y $ACD = 58^{\circ}$.

Problema 5.
Sean *a* y *b* números racionales tales que $a + b = a^2 + b^2$. Supongamos que el valor común $s = a + b = a^2 + b^2$ no es entero, y escribámoslo como fracción irreducible: $s = \frac{m}{n}$. Sea *p* el menor divisor primo de *n*. Hallar el mínimo valor de *p*.

Problema 6.
Sea *AB* un segmento de longitud 1. Varias partículas comienzan a moverse simultáneamente a velocidades constantes desde *A* hasta *B*. Tan pronto como una partícula alcanza *B*, da vuelta y se dirige a *A*; cuando llega a *A*, comienza a moverse nuevamente hacia *B*, y así indefinidamente.
Hallar todos los números racionales $r > 1$ tales que existe un instante *t* con la siguiente propiedad: Para cada $n \geq 1$, si $n + 1$ partículas con velocidades constantes $1, r, r^2, ..., r^n$ se mueven como se describió, en el instante *t* todas ellas se encuentran en un mismo punto interior del segmento *AB*.