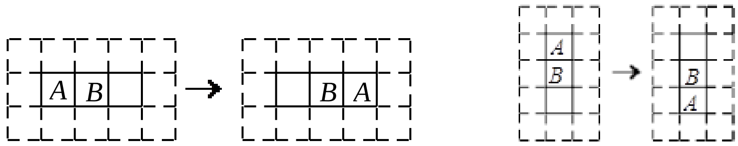
V OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA

PRIMER NIVEL

Problema 1

En un tablero cuadriculado infinito se ubican *n* fichas en *n* casillas. El movimiento permitido es el siguiente: si una de las 4 casillas vecinas a una ficha *A* tiene una ficha *B* y la siguiente casilla está vacía, se puede mover la ficha *A* por encima de *B* hasta la siguiente casilla. Por ejemplo



Este movimiento se puede hacer en cualquiera de las 4 direcciones $\rightarrow \uparrow \leftarrow \downarrow$.
Decidir si existe una ubicación de las *n* fichas de modo que luego de un número finito de movimientos permitidos se obtenga una configuración de las fichas idéntica a la original pero desplazada en 1 casilla en alguna de las 4 direcciones posibles para
a) $n = 2015$; b) $n = 2000$; c) $n = 2014$.

Problema 2

Sea *AM* la mediana del triángulo *ABC*. Sea *P* el punto de la bisectriz del ángulo BMA tal que $BP \perp MP$, y sea *Q* el punto de la bisectriz del ángulo CMA tal que $CQ \perp MQ$. La recta *AM* corta al segmento *PQ* en *R*. Calcular $\frac{PR}{QR}$.

Problema 3

Para cada entero *n* desde 1 hasta 22 consideramos el conjunto de todos los enteros desde *n* hasta 24: $M = \{n, n+1, ..., 24\}$. Determinar los valores de *n* tales que *M* se puede descomponer en varios conjuntos de modo que en cada conjunto de la descomposición haya un número que sea igual a la suma de todos los demás números de ese conjunto.

SEGUNDO NIVEL

Problema 1

Un número natural *n* se dice un *supercuadrado* si *n* es un cuadrado perfecto y además se puede obtener escribiendo sucesivamente, uno a continuación de otro, dos o más cuadrado perfectos mayores que cero. Por ejemplo, $n = 169$ es un supercuadrado pues $n = 169 = 13^2$ y además *n* se escribe como 16 seguido de 9, con $16 = 4^2$ y $9 = 3^2$.
Hallar tres números supercuadrados que sean múltiplos de 17.

Problema 2

En la expresión $A = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, los números *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* son enteros positivos. Si se reemplaza *a* por $a+1$ el valor de *A* aumenta en 3. Si se reemplaza *c* por $c+1$ (en la expresión original) el valor de *A* aumenta en 4. Si se reemplaza *e* por $e+1$, en la expresión original, el valor de *A* aumenta en 5. Hallar el mínimo valor que puede tener la multiplicación $b \cdot d \cdot f$.

Problema 3

Se tiene un triángulo *ABC*. Usando exclusivamente una regla sin graduación y un compás, hay que marcar los puntos *D* y *E* en los lados *AC* y *BC* respectivamente, de manera que *DE* sea paralela a *AB* y que $AD + BE = AB$.

V OLIMPÍADA MATEMÁTICA URBANA METROPOLITANA

TERCER NIVEL

Problema 1
Tres números forman una progresión aritmética de diferencia 11.
Al primer número se le resta 6, al segundo se le resta 1 y al tercero se lo multiplica por 2.
Se obtienen así tres números que forman una progresión geométrica.
Determinar los tres números originales. Dar todas las posibilidades.

Problema 2
Determinar cuántos enteros $N < 10^6$ tienen la siguiente propiedad:
Para cada $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, el resto de dividir N por j es mayor o igual que $\frac{j}{2}$.

Problema 3
Se dan en el plano una recta r y un punto A que no pertenece a la recta. Cada punto M de la recta r determina un punto N del plano de modo que el triángulo AMN es equilátero, considerando los vértices del triángulo AMN en sentido horario.
Hallar el lugar geométrico de los vértices N de los triángulos AMN cuando el vértice M se mueve en la recta r.