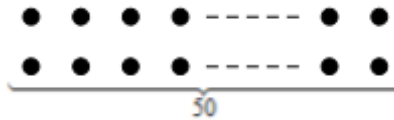


## PROBLEMAS REGIONAL OMA 2017

### Primer Nivel

1. En una hoja hay marcados 100 puntos en dos líneas horizontales, como se muestra en la figura. En cada horizontal, la distancia entre dos puntos vecinos es igual a 1. La distancia entre los dos puntos de cada vertical también es igual a 1.

Se deben elegir tres puntos marcados de modo que el triángulo que forman sea isósceles. Determinar de cuántas maneras se puede hacer la elección.



2. En cada casilla de un tablero de 4 filas y  $k$  columnas hay escrito un número entero positivo. En cada columna la suma de los 4 números es igual a 30. Los  $k$  números de cada fila son distintos. Hallar el máximo número posible  $k$  de columnas que puede tener el tablero.

Dar un tablero con esa cantidad de columnas y explicar por qué no puede tener más columnas.

3. Sean  $ABCDEF$  un hexágono regular y  $P$  el punto medio del lado  $AB$ . El segmento  $PE$  corta a la diagonal  $CF$  en  $Q$  y el segmento  $PD$  corta a la diagonal  $CF$  en  $R$ .

Calcular  $\frac{\text{área}(DEQR)}{\text{área}(FPQ)}$ .

### Segundo Nivel

1. Un pescador pescó  $N$  truchas. Él le dio a su vecino las tres truchas más grandes de modo que el peso total de lo que había pescado disminuyó en un 35%. Luego le dio a su gato las tres truchas más

pequeñas de modo que el peso de lo que le quedaba bajó en  $\frac{5}{13}$ .

Determinar cuántas truchas pescó. Dar todas las posibilidades.

2. Hallar todos los números naturales  $n$ , no primos, tales que: para cada divisor positivo  $d$  de  $n$ , con  $d \neq n$  y  $d \neq 1$ , se satisface la desigualdad

$$n - 20 \leq d \leq n - 12$$

3. Sea  $ABC$  un triángulo isósceles con  $AB = BC$  y  $\angle ABC$  mayor que  $60^\circ$ . Sea  $D$  en el lado  $AB$  tal que  $CD$  es bisectriz del ángulo  $\angle BCA$ . La recta perpendicular a  $CD$  trazada por  $D$  corta al lado  $AC$  en  $E$ . La recta paralela a  $BC$  trazada por  $D$  corta al lado  $AC$  en  $F$ . Si  $AD = 6$  y  $AE = 2$ , calcular la medida del segmento  $AF$  y del lado  $AB$ .

### Tercer Nivel

1. Un número entero positivo de 10 dígitos se llama *diverso* si sus 10 dígitos son distintos. Hallar la cantidad de números diversos que son divisibles por 99.

2. En cada casilla de un tablero rectangular hay escrito un número entero. Las operaciones permitidas son:

- Elegir una casilla en cada una de las filas y sumar 1 a cada uno de los números de las casillas seleccionadas.
- Elegir una casilla en cada una de las columnas y restar 1 a cada uno de los números de las casillas seleccionadas.

Decidir si es posible, cualesquiera sean los números iniciales y mediante una cantidad finita de operaciones permitidas, obtener un tablero con todos ceros si las dimensiones del tablero son

a)  $15 \times 20$

b)  $5 \times 11$ .

3. Sea  $PQR$  un triángulo isósceles con  $PQ = PR = 3$  y  $QR = 2$ . Sea  $\omega$  la circunferencia que pasa por  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . La recta tangente a  $\omega$  por  $Q$  corta a la recta  $PR$  en  $X$ . Hallar la longitud del segmento  $RX$ .